Concursul interjudețean de matematică
„UNIREA 2010”, ediția a X-a
Focşani, 29 ianuarie 2010

Clasa a VII-a

Subiectul 1. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel ca $\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{x}}{2\sqrt{2}-\sqrt{x}}$ să fie număr întreg.

Subiectul 2. Să se determine mulțimea:

$$A=\left\{k \in \mathbb{N} \mid \exists p,q \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \frac{36p^2+q^2}{4pq}=k\right\}.$$

Subiectul 3. Fie triunghiul ascuțitunghic *ABC* şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $AD = BC$ şi pătratele *CDEF*, *BDGH* (dreapta *BC* separă *A* de *E* şi *G*). Să se arate că dreptele *BF*, *CH* şi *AD* sunt concurente.

Subiectul 4. Fie $M_n = \{\Delta ABC \mid AB, BC \in \mathbb{N}^*, AC = n, n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } AB = CD\}$, unde *D* este piciorul bisectoarei unghiului *BAC*.

a) Să se arate că $M_{2009} \neq \varnothing$;

b) Să se determine triunghiul din mulțimea M_{2009} care are perimetrul maxim;

c) Să se arate că $M_{2011} = \varnothing$.

Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul interjudețean de matematică
„UNIREA 2010”, ediția a X-a
Focşani, 29 ianuarie 2010

Clasa a VIII-a

Subiectul 1. a) Să se arate că ecuația $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}=0$ are o infinitate de soluții întregi;

b) Să se arate că orice soluție a ecuației date este souție şi a ecuației $\frac{y}{x+y}+\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+x}=3$.

Subiectul 2. a) Să se arate că numărul $x=3n\cdot 10^n-4^n+1$ se divide cu 9, oricare ar fi *n* număr natural;

b) Dacă $n\in\mathbb{N}$, să se determine partea întreagă a numărului $\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n+2}$.

Subiectul 3. Fie numerele naturale *a*, *b*, *c*, *n* astfel încât $a<b<c<n$ şi *n* număr prim. Arătați că numerele a^4, b^4, c^4 nu pot da acelaşi rest la împărțirea cu n^2.

Subiectul 4. Pe planul pătratului *ABCD*, cu latura de 3, de aceeaşi parte a planului, în punctele *B*, *C* şi *D* se ridică perpendicularele $BB_1=2$, $CC_1=8$ şi $DD_1=4$.

a) Să se determine pe perpendiculara în *A* pe planul pătratului, punctul A_1, astfel încât punctele A_1, B_1, C_1 şi D_1 să fie coplanare;

b) Să se determine distanța de la punctul O la intersecția planelor (ABC) şi $(A_1B_1C_1)$, unde $\{O\}=AC\cap BD$.

Timp de lucru 3 ore.

SUCCES!

Concursul de matematică "UNIREA", Ediţia a X-a
Focşani, 29 ianuarie 2010

Clasa a IX-a

Subiectul 1. Fie a şi n numere naturale nenule, astfel încât $a < \sqrt{2n}$. Să se arate că numărul $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă n se divide cu a.

Subiectul 2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea

$$f(x) + f(x+y) \in \mathbb{Q}, \qquad (*)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $y > 0$. Să se arate că $f(x) \in \mathbb{Q}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi. Pe laturile BC, CA şi AB considerăm punctele A', B' şi C' astfel încât segmentele AA', BB' şi CC' sunt concurente în punctul M.

a) Să se demonstreze relaţia lui *Van Aubel:*

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}.$$

b) Ştiind că

$$\frac{AM}{MA'} \cdot \frac{BM}{MB'} \cdot \frac{CM}{MC'} = 2010,$$

să se calculeze

$$\frac{AM}{MA'} + \frac{BM}{MB'} + \frac{CM}{MC'}.$$

Subiectul 4. Fie trunghiul ascuţitunghic ABC cu centrul de greutate G. Considerăm o dreaptă d care trece prin G şi intersectează segmentele (AB) şi (AC) în punctele M şi, respectiv, N. Fie O intersecţia segmentelor $[BN]$ şi $[CM]$. Arătaţi că expresia

$$2[AMN] + [BOC] - [MON]$$

este constantă, adică nu depinde de alegerea dreptei d. (Prin $[XYZ]$ am notat aria triunghiului XYZ).

Concursul de matematică "UNIREA", Ediţia a X-a
Focşani, 29 ianuarie 2010

Clasa a X-a

Subiectul 1. Fie n un număr natural nenul. Se notează cu a_n numărul submulţimilor nevide ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care nu conţin numere consecutive. Să se arate că

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 2. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$ afixele vârfurilor patrulaterului convex $ABCD$. Ştiind că
a) $a\overline{c} = \overline{a}c$, $b\overline{d} = \overline{b}d$;
b) $a + b + c + d = 0$,
arătaţi că $ABCD$ este paralelogram.

Subiectul 3. Funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ verifică relaţia

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x) f(y), \qquad (*)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.
a) Arătaţi că $f(1) \in \{-1, 0, 1\}$.
b) Determinaţi toate funcţiile care verifică relaţia (*).

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < \frac{1}{2}$. Pe laturile BC, CA, AB se consideră punctele D, E, F, astfel încât $\overline{BD} = k\overline{BC}$, $\overline{CE} = k\overline{CA}$, $\overline{AF} = k\overline{AB}$. Să se stabilească dacă următoarele două condiţii sunt echivalente:
(1) Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul DEF;
(2) Triunghiul ABC este echilateral.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „UNIREA"
A X-A EDIŢIE, FOCŞANI, 29 IANUARIE 2010

Clasa a XI-a

1. a) Arătaţi că, dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, atunci

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) & d(d-1) \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) & d(d-1)(d-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

b) Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere întregi. Arătaţi că numărul $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ este divizibil cu $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$.

2. a) Arătaţi că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci $2\det(X) = (\mathrm{tr}(X))^2 - \mathrm{tr}(X^2)$, unde $\mathrm{tr}(M)$ reprezintă urma matricei pătrate M (suma elementelor de pe diagonala principală).

b) Se ştie că matricele $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$ au proprietatea

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţi că $\det(BA) = ad - bc$.

3. a) Demonstraţi că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

b) Calculaţi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt[n]{k}}}{\ln n}.$$

4. Fie două funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Demonstraţi că, dacă $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ există şi este finită, atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ există.
b) Rămâne concluzia precedentă valabilă în cazul în care $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$?

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ ,,UNIREA"
A X-A EDIŢIE, FOCŞANI, 29 IANUARIE 2010

Clasa a XII-a

1. Fie $n \geq 1$ un număr natural şi $(G, \cdot)$ un grup astfel încât funcţia $f : G \to G$, $f(x) = x^n$ să fie morfism de grupuri.

a) Arătaţi că, dacă $n = 3$ şi f este injectivă, atunci G este comutativ.

b) Arătaţi că, dacă $n = 3$ şi f este surjectivă, atunci G este comutativ.

c) Daţi exemplu de grup necomutativ pentru care funcţia $g : G \to G,\ g(x) = x^4$ este automorfism de grupuri.

2. Fie $k \geq 1$ un număr natural şi G o submulţime cu k elemente a lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, care este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor şi este grup în raport cu operaţia indusă. Fie $S = \sum\limits_{A \in G} A$ şi t urma matricei S (suma elementelor de pe diagonala principală). Ştiind că $t = nk$, arătaţi că $S = kI_n$.

3. Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, derivabilă pe $[0,1]$ şi cu proprietatea $f(0) = 0$. Calculaţi

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x.$$

4. Fie o funcţie continuă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu proprietatea

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^2 + 1}, \forall x \geq 0$$

şi F o primitivă sa. Arătaţi că F este mărginită şi că $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ există.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte